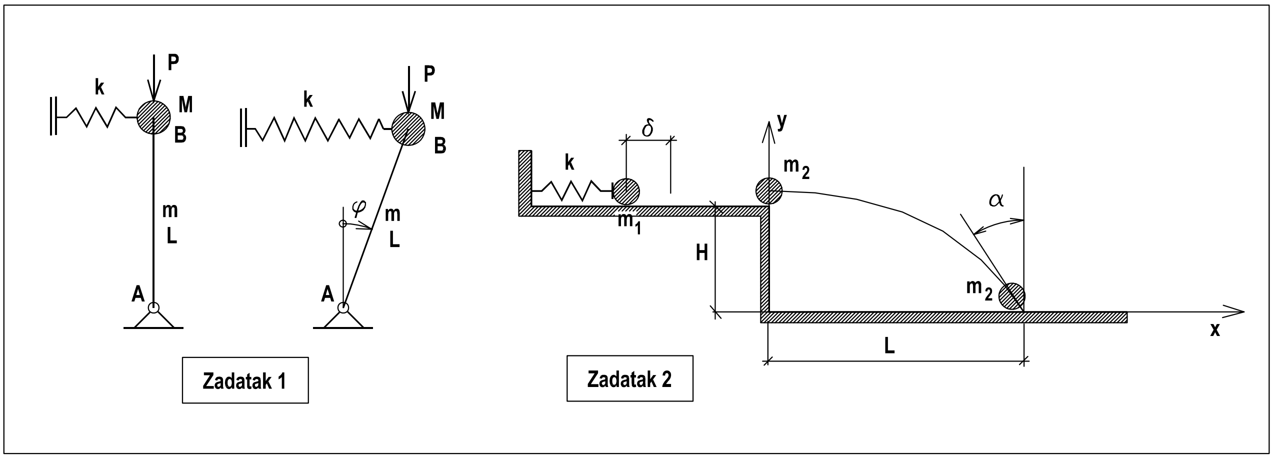
Tehnička mehanika 2 - ispit 18. aprila 2007.

ZADATAK 1 (. . . 20%) Na slici 1 je prikazan štap AB, mase m i dužine L, na čijem se kraju B nalazi koncentrisana masa M. Štap može da se kreće u vertikalnoj ravni i na slici je prikazan u stanju mirovaja u vertikalnom položaju. Štap je na kraju A vezan nepokretnim osloncem, a na kraju B horizontalnom oprugom krutosti k, pri čemu je opruga nenapregnuta kada je štap vertikalan. Osim sopstvenom težinom, štap je opterećen i vertikalnom silom P na svom vrhu B.

(a) Izvesti diferencijalnu jednačinu malih oscilacija štapa.

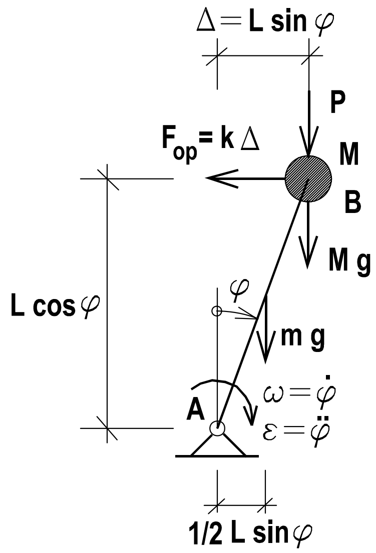
(b) Ako se zna da se kritična sila izvijanja pritisnutog štapa može da odredi iz uslova da je kružna frekvencija slobodnih harmonijskih oscilacija štapa jednaka nuli (dinamički kriterijum stabilnosti), odrediti najmanju potrebnu krutost opruge tako da kritična sila izvijanja P_{kr} bude veća od 300 kN. U ovoj analizi koristiti numeričke podatke: $M = 1.5m$, $m = 15t, L = 3.0m, g = 10\frac{m}{s^2}$.

ZADATAK 2 (. . . 20%) Materijalna tačka mase m_2 se nalazi u mirovanju na ivici horizontalne ravni, kako je prikazano na slici 2. U nekom trenutku na tu tačku naleti tačka mase m_1 usled otpuštanja prethodno sabijene opruge. Opruga je krutosti $k = 100\mathrm{kN/m}$ i sabijena je za neku veličinu δ. Ako se zna da su mase tačaka međusobno iste $m_1 = m_2 = 50kg$, kao i da je udar idealno elastičan, odrediti potrebno sabijanje opruge tako da tačka mase m_2, posle udara, padne na horizontalnu ravan koja je za $H = 2m$ niža od njenog početnog položaja, a da pri tome upadni ugao u odnosu na vertikalu bude $\alpha = 30^0$. Takođe odrediti i mesto pada tačke na donju ravan (rastojanje L).



ZADATAK 1 (...20%)

(a) Štap AB ima jedan stepen slobode, $n = 1, q_1 = \varphi$ i na slici je prikazan proizvoljan položaj štapa tokom kretanja. Na slici su takođe prikazane i sve sile koje deluju na štap, osim reakcije veze u osloncu A.



Diferencijalna jednačina kretanja može da se izvede iz Zakona o promeni momenta količine kretanja:

$$J_A \epsilon = M_A \tag{1}$$

Momenat inercije štapa za osu rotacije u tački A je dat sa:

$$J_A = \frac{1}{3} m L^2 + M \cdot L^2 \tag{2}$$

dok su momenti svih aktivnih i reaktivnih sila za istu osu dati sa:

$$M_A = PL \sin\varphi + MgL \sin\varphi + \frac{1}{2} mgL \sin\varphi - F_{op} L \cos\varphi \tag{3}$$

Pri tome je sila u opruzi data sa

$$F_{op} = k \cdot \Delta = k \cdot L \sin\varphi \tag{4}$$

Kako se posmatraju male oscilacije štapa, odn. kako je $\varphi \approx 0$, odn. $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, to se diferencijalna jednačina kretanja (1) dobija u obliku

$$J_A \ddot{\varphi} = (PL + MgL + \frac{1}{2} mgL - kL^2) \cdot \varphi \tag{5}$$

Jednačina (5) može da se prikaže u obliku homogene diferencijalne jednačine slobodnih oscilacija štapa:

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = 0 \tag{6}$$

gde je uvedena oznaka

$$\Omega^2 = \frac{1}{J_A} \cdot (kL^2 - PL - MgL - \frac{1}{2} mgL) \tag{7}$$

za kvadrat kružne frekvencije slobodnih oscilacija.

(b) U odsustvu bilo kakvih poremećaja, kao i pri dovoljno malom intenzitetu normalne sile pritiska, štap će da miruje u svojoj ravnotežnoj konfiguraciji definisanoj sa $\varphi = 0$ (u vertikalnom položaju). Sa povećanjem sile P prvobitna ravnotežna konfiguracija štapa može da postane nestabilna i da štap naglo pređe u drugu, beskonačno blisku, ravnotežnu konfiguraciju (bifurkacija ravnotežnih stanja), datu sa $\varphi \neq 0$.

Minimalna sila P pri kojoj to može da se realizuje, odn. kritična sila izvijanja P_{kr}, može da se odredi, kako je zadatkom rečeno, iz uslova da je kružna frekvencija slobodnih harmonijskih oscilacija jednaka nuli (dinamički kriterijum stabilnosti). Imajuću u vidu dobijen izraz za kružnu frekvenciju koji je dat sa (7), kritična sila je onda data sa:

$$\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad P = P_{kr} = kL - Mg - \frac{1}{2}mg \tag{8}$$

Ako je data vrednost kritične sile i ako se traži da se odredi minimalna krutost opruge tako da kritična sila bude veća od neke zadate vrednosti, onda se iz relacije (8) može da dobije potrebna krutost opruge:

$$k \geq \frac{1}{L} \cdot (P_{kr} + Mg + \frac{1}{2}mg) \tag{9}$$

Zadatkom su zadate i numeričke vrednosti: $P_{kr} = 300kN$, $M = 1.5m$, pri čemu je $m = 15t$, $L = 3.0m$, a za ubrzanje zemljine teže se usvaja $g = 10\frac{m}{s^2}$. Sa ovim se dobija sledeće:

$$k \geq \frac{1}{L} \cdot (P_{kr} + 2mg) = \frac{1}{3.0} \cdot (300 + 2 \cdot 15 \cdot 10) = \frac{600.0}{3.0} = 200\ \frac{kN}{m} \tag{10}$$

Znači, ako je krutost opruge veća od $200^{\mathrm{kN}}/_{\mathrm{m}}$, onda je kritična sila veća od zadate vrednosti od 300 kN.

ZADATAK 2 (. . . 20%)

Zadatak se sastoji iz tri tri celine: prvo se, otpuštanjem sabijene opruge, tačka mase m_1 kreće po horizontalnoj ravni do udara u tačku mase m_2, zatim se dogodi udar dve tačke, a posle toga tačka koja je udarena započinje kretanje (horizontalan hitac) do svog pada na nižu horizontalnu ravan.
Na slici 1 je prikazan prvi deo: kretanje tačke m_1 i njen udar u tačku m_2. Sa stanovišta posmatranog problema, za tačku m_1 je bitna brzina sa kojom ona udari u tačku m_2.
To se određuje iz Zakona o promeni kinetičke energije za položaje (1) i (2), gde je (2) položaj u trenutku neposredno pre udara u tačku m_2:

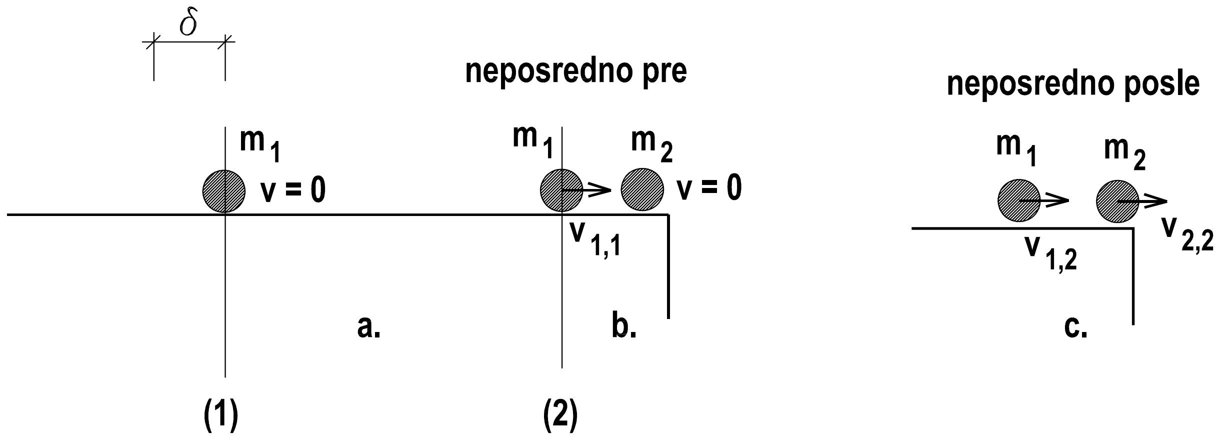
$$T_2 - T_1 = A_{1-2} \tag{11}$$

U položaju (1) tačka miruje, u položaju (2) tačka ima neku nepoznatu brzinu $v_{1,1}$, a kako se kretanje obavlja po horizontalnoj ravni (bez trenja), rad vrši samo sila u sabijenoj opruzi. Imajući to u vidu, dobija se

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_{1,1}^2 = \frac{1}{2}k \cdot \delta^2 \tag{12}$$

Za poznatu krutost i sabijanje opruge, kao i za datu masu tačke, iz relacije (12) može da se odredi brzina tačke m_1 neposredno pre udara u tačku m_2.
Posmatra se sada idealno elastičan udar dve tačke, slika 1, b-c. Takav udar je određen sa sledeće dve jednačine (koje se odnose za sistem od obe tačke istovremeno):

$$K_2 - K_1 = 0 \qquad T_2 - T_1 = 0 \tag{13}$$



Slika 1: Udar dve tačke

Ako se sa $v_{i,1}$ i $v_{i,2}$, $(i = 1, 2)$ označe brzine tačaka m_i neposredno pre i neposredno posle udara, jednačine (13) dobijaju oblik:

$$K_2 - K_1 = 0: \qquad (m_1 v_{1,2} + m_2 v_{2,2}) - m_1 v_{1,1} = 0 \tag{14}$$
$$T_2 - T_1 = 0: \qquad (\frac{1}{2} m_1 v_{1,2}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,2}^2) - \frac{1}{2} m_1 v_{1,1}^2 = 0$$

Zadatkom je dato da su mase obe tačke međusobno iste: $m_1 = m_2 (= 50kg)$, tako da se kao rešenje sistema (15) dobija sledeće:

$$v_{2,2} = v_{1,1} \qquad v_{1,2} = 0 \tag{15}$$

odnosno, tačke istih mase posle idealno elastičnog udara razmenjuju brzine koje su imale neposredno pre udara. Znači, tačka mase m_1 ostaje na mestu udara u stanju mirovanja, a udarena tačka m_2 započinje kretanje sa brzinom koju je imala tačka m_1 neposredno pre udara.
Posmatra se drugi deo kretanja - horizontalan hitac tačke m_2, što je prikazano na slici 2.
Diferencijalne jednačine kretanja, u sistemu dekartovih koordinata datim na slici 2, glase:

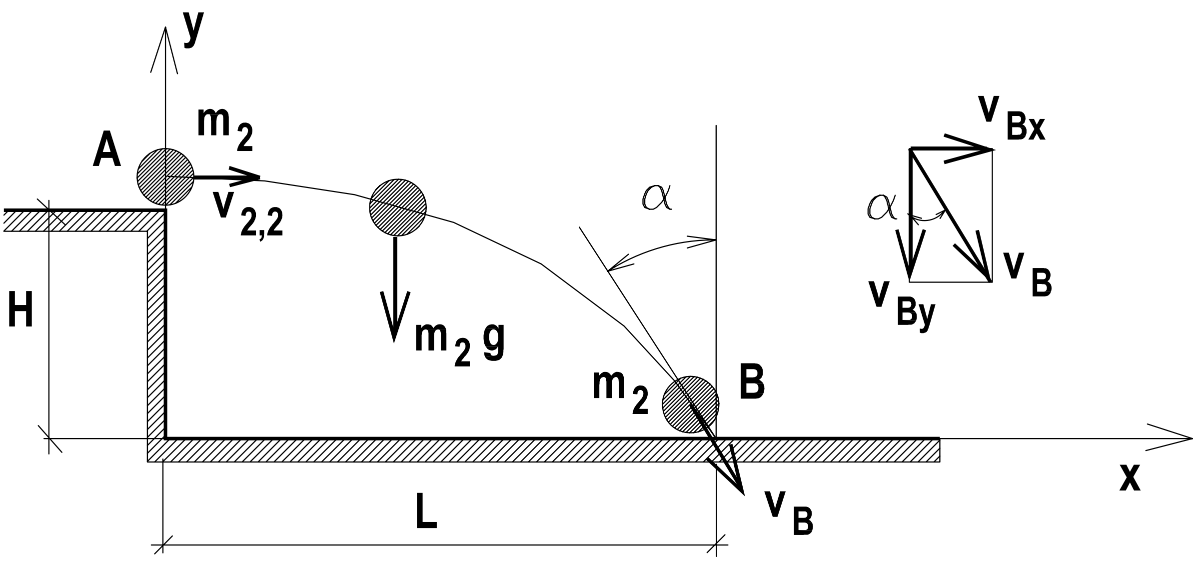
$$m_2 \ddot{x} = 0 \qquad m_2 \ddot{y} = -m_2 g \tag{16}$$

Opšti integral jednačina (16) je dat sa:

$$\dot{x} = C_1 \qquad x = C_1 \cdot t + C_2 \tag{17}$$

za pravac horizontalne ose x, kao i sa

$$\dot{y} = -gt + D_1 \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 + D_1 \cdot t + D_2 \tag{18}$$



Slika 2: Kretanje tačke m_2 posle udara

za pravac ose y. Imajući u vidu početne uslove kretanja tačke:

$$\begin{aligned} t = 0: &\quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_{2,2} \\ t = 0: &\quad y(0) = H, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

dobijaju se konačne jednačine kretanja tačke m_2 u obliku:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{2,2} \cdot t, \quad \dot{x}(t) = v_{2,2} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + H, \quad \dot{y}(t) = -gt \end{aligned} \tag{20}$$

Zadatkom se traži da tačka m_2 padne na nižu horizontalnu ravan u položaj B, pri čemu je upadni ugao prema vertikali jednak $\alpha = 30^0$. Položaj tačke B je dat sa koordinatama $B(L, 0)$ i ako se sa t_B označi trenutak dolaska tačke m_2 u položaj B, onda važe sledeće relacije:

$$x(t_B) = L, \qquad y(t_B) = 0 \tag{21}$$

Jednačine (21) glase

$$L = v_{2,2} \cdot t_B, \quad 0 = -\frac{1}{2}gt_B^2 + H \tag{22}$$

Prva od relacija (22) daje vezu između vremena pada tačke i njene početne brzina, a iz druge od jednačina (22) može da se odredi vreme pada tačke u položaj B, jer je visina H zadata:

$$t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{23}$$

Zadatkom je rečeno da tačka padne na ravan u položaju B pod uglom α prema vertikali. To znači da važi sledeća relacija, videti sliku 2:

$$\tan\alpha = \frac{\dot{x}_{t_B}}{\dot{y}(t_B)} = \frac{v_{2,2}}{\sqrt{2gH}} \tag{24}$$

Kako je dato da je ugao $\alpha = 30^0$, to se, iz relacije (24) dobija potrebna brzina tačke na početku kretanja (odn. neposredno posle udara):

$$v_{2,2} = \tan\alpha \cdot \sqrt{2gH} = \tan 30^0 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2.0} = 3.6166\ \frac{m}{s} \tag{25}$$

Iz relacije (23) može da se dobije vreme kretanja tačke t_B:

$$t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.0}{9.81}} = 0.6386\ s \tag{26}$$

a iz prve od relacija (22) može da se dobije dužina L:

$$L = v_{2,2} \cdot t_B = 3.6166 \times 0.6386 = 2.3094\ m \tag{27}$$

Najzad, prema rešenju (15), brzina tačke m_1 neposredno pre nego što je udarila u tačku m_2 jednaka je brzini $v_{2,2} = 3.6166\ \frac{m}{s}$, pa se, prema relaciji (12) dobija potrebno sabijanje opruge da se svo ovo realizuje:

$$\delta = v_{1,1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 3.6166 \cdot \sqrt{\frac{50}{100 \times 10^3}} = 0.0809\ m \tag{28}$$

Prema tome, potrebno sabijanje opruge je za oko 8.1 cm.